المحاضرة السابعة الحلول العددية لجملة من المعادلات الجبرية

7.1. طريقة جاكوبي لحل جملة معادلتين غير خطيتين بمجهولين.

لنفرض أنَّ لدينا المعادلتين:

$$f(x,y)=0 \qquad g(x,y)=0$$

عندئذ لإيجاد الحل التقريبي (x^*,y^*) حيث إنَّ $x^*,y^*\in I$ لهذه الجملة من المعادلات وفق طريقة جاكوبي نتبع الخطوات الآتية:

1- نكتب جملة المعادلتين بالشكل:

$$x=f_1(x,y) \qquad y=g_1(x,y)$$

2- نتأكد من شروط الحل والتي هي بالشكل:

ش.1. $f_1,g_1,f_{1x},f_{1y},g_{1x},g_{1y}$ دوال مستمرة أياً كانت $x,y\in I$.

ش.2. $|f_{1x}|+|g_{1x}|<1, |f_{1y}|+|g_{1y}|<1$ أياً كانت $x,y\in I$.

3- نفرض أنَّ (x_0,y_0) حيث إنَّ $x_0,y_0\in I$ حلاً ابتدائياً، ثم نحسب قيم المتتاليات:

$$x_{n+1}=f_1(x_n,y_n), y_{n+1}=g_1(x_n,y_n)$$

حتى نحصل على قيم تحقق أنَّ $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon, |y_{n+1}-y_n|<\varepsilon$ حيث إنَّ ε قيمة معطاة، ويكون عندئذ الحل التقريبي المطلوب هو (x_{n+1},y_{n+1}).

مثال.1.

استخدم طريقة جاكوبي لإيجاد الحل التقريبي لجملة المعادلات غير الخطية:

$$0.1x^2+0.1y^2-x+0.8=0$$

$$0.1x+0.1xy^2-y+0.8=0$$

في المجال $I=[0,1.5]$ علماً أنَّ $\varepsilon=0.05$ وأنَّ $(0,0)$ حلاً تقريبياً.

الحل.

نكتب المعادلات المفروضة بالشكل:

$$x=0.1x^2+0.1y^2+0.8$$

$$y=0.1x+0.1xy^2+0.8$$

ونضع $f_1(x,y)=0.1x^2+0.1y^2+0.8$, $g_1(x,y)=0.1x+0.1xy^2+0.8$

عندئذ $f_{1x}=0.2x$, $f_{1y}=0.2y$, $g_{1x}=0.1+0.1y^2, g_{1y}=0.2xy$ ، ونلاحظ أنَّ:

- $f_1,g_1,f_{1x},f_{1y},g_{1x},g_{1y}$ دوال مستمرة أياً كانت $x,y\in I$.
- $|f_{1x}|+|g_{1x}|<1, |f_{1y}|+|g_{1y}|<1$ أياً كانت $x,y\in I$.

i	x_i	y_i
0	0	0
1	0.8	0.8
2	0.928	0.9312
3	0.9728	0.9732

نلاحظ أنَّ $|x_3 - x_2| = 0.0448 < \varepsilon, |y_3 - y_2| = 0.042 < \varepsilon$، وبالتالي الحل التقريبي المطلوب: $(0.9728, 0.9732)$.

7.2. طريقة التقريبات المتتالية لحل جملة ثلاثة معادلات خطية.

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3$$

حيث إنَّ $a_{11}, a_{22}, a_{33} \neq 0$، لحل هذه الجملة بطريقة التقريبات المتتالية، نكتبها بالشكل:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(d_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(d_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right)$$
$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left(d_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right)$$

عندئذ إذا كان $\left(x^0{}_1, x^0{}_2, x^0{}_3\right)$ حلاً ابتدائياً، فإننا نوجد متتاليات الحلول:

$$x_1^{n+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(d_1 - a_{12}x_2^n - a_{13}x_3^n\right)$$
$$x_2^{n+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(d_2 - a_{21}x_1^n - a_{23}x_3^n\right)$$
$$x_3^{n+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(d_3 - a_{31}x_1^n - a_{32}x_2^n\right)$$

ويكون عندئذ $\left(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, x_3^{n+1}\right)$ هو الحل التقريبي المطلوب إذا تحقق:

$$\left|x_1^{n+1} - x_1^n\right| < \varepsilon, \left|x_2^{n+1} - x_2^n\right| < \varepsilon, \left|x_3^{n+1} - x_3^n\right| < \varepsilon$$

حيث إنَّ ε عدد معطى.

مثال.1.

استخدم طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد الحل التقريبي لجملة المعادلات الخطية:

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

علماً أنَّ $(0,0,0)$ هو حل ابتدائي وأنَّ $\varepsilon = 0.05$.

الحل.

نكتب الجملة المفروضة بالشكل:

$$x_1 = \frac{1}{10}(12 - x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{10}(12 - x_1 - x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{10}(12 - x_1 - x_2)$$

بما أنَّ $(0,0,0)$ حلاً ابتدائياً، فإننا نوجد متتاليات الحلول:

$$x_1^{n+1} = \frac{1}{10}(12 - x_2^n - x_3^n)$$

$$x_2^{n+1} = \frac{1}{10}(12 - x_1^n - x_3^n)$$

$$x_3^{n+1} = \frac{1}{10}(12 - x_1^n - x_2^n)$$

n	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	0	0	0
1	1.2	1.2	1.2
2	0.96	0.96	0.96
3	1.008	1.008	1.008

بما أنَّ $\left|x_1^3 - x_1^2\right| = \left|x_2^3 - x_2^2\right| = \left|x_3^3 - x_3^2\right| = 0.048 < \varepsilon$ يكون عندئذ $(1.008,1.008,1.008)$ هو الحل التقريبي المطلوب.